7 Correction de l'épreuve (compétence 2)

1. L'ÉGALITÉ

A. Exemple d'un raisonnement approprié.

On doit simplifier l'expression suivante :

$$\log_5 \sqrt[3]{\frac{10x^3y^2x^{-5}}{(5x)^{-2}y^{-4}}} = \frac{1}{3}\log_5 \frac{10x^3y^2x^{-5}}{(5x)^{-2}y^{-4}} = \frac{1}{3}\log_5 2(5)^3 x^{3-5+2}y^{2+4} = \frac{1}{3}\log_5 2(5)^3 y^6$$

$$= \frac{1}{3}\left(\log_5 2 + \log_5 5^3 + \log_5 y^6\right) = \frac{1}{3}\left(\log_5 2 + 3\log_5 5 + 6\log_5 y\right) = \frac{1}{3}\log_5 2 + 2\log_5 y + 1$$

- **CONCLUSION**

L'élève a raison de dire qu'il est possible d'obtenir l'expression logarithmique $\frac{1}{3}\log_5 2 + 2\log_5 y + 1$ **.**

B. Éléments observables dans le contexte de la tâche

Critères d'évaluation de la compétence *Déployer un raisonnement mathématique*		**Éléments observables** **L'ÉGALITÉ**
		L'élève…
Cr. 3	Mise en œuvre convenable d'un raisonnement mathématique adapté à la situation	♦ reconnaît que le problème fait appel aux lois des exposants. ♦ reconnaît que le problème fait appel aux lois des logarithmes.
Cr. 2	Utilisation correcte des concepts et des processus appropriés à la situation	♦ détermine une expression équivalente en éliminant le radical. ♦ détermine une expression équivalente en éliminant la variable x. ♦ détermine une expression équivalente en simplifiant le coefficient numérique.

		♦ décompose le logarithme en une somme de logarithmes. ♦ compare l'expression finale à celle du départ.
Cr. 4	Structuration adéquate des étapes d'une démarche pertinente	♦ présente des traces claires et structurées.
Cr. 5	Justification congruente des étapes d'une démarche pertinente	♦ fournit une justification adéquate en fonction des traces.

2. PROMENADE AU ROCHER PERCÉ

A. Exemple d'un raisonnement approprié.

L'amplitude de la fonction : $\dfrac{\max - \min}{2} = \dfrac{2{,}2 - 0}{2} = 1{,}1$

La période de la fonction : 20 – 8 = 12 h

Pour trouver b :

$$\text{période} = \frac{2\pi}{|b|}$$

$$12 = \frac{2\pi}{|b|}$$

$$|b| = \frac{2\pi}{12} \qquad \text{Donc } b = \frac{\pi}{6}$$

On trouve (h , k) qui est : (11 , 1,1)

La règle de la fonction est donc : $f(x) = 1{,}1 \sin\left(\dfrac{\pi}{6}(x - 11)\right) + 1{,}1$

On a donc que : f (18) = m

Il y aura donc 0,55 m d'eau à 18h.

B. Éléments observables dans le contexte de la tâche

Critères d'évaluation de la compétence *Déployer un raisonnement mathématique*		**Éléments observables** **PROMENADE AU ROCHER PERCÉ**
		L'élève…
Cr. 3	Mise en œuvre convenable d'un raisonnement mathématique adapté à la situation	♦ reconnaît qu'il doit déterminer : • l'amplitude; • la période; • la valeur de b; • les valeurs de h et de k. ♦ reconnaît qu'il doit établir la règle de la fonction. ♦ reconnaît qu'il doit déterminer le niveau de l'eau à 18h.
Cr. 2	Utilisation correcte des concepts et des processus appropriés à la situation	♦ détermine l'amplitude (1,1). ♦ détermine la période (12). ♦ détermine la valeur de b ($\frac{\pi}{6}$). ♦ détermine les valeurs de h et k (h = 11 et k = 1,1). ♦ détermine la règle de la fonction $f(x) = 1{,}1\sin\left(\frac{\pi}{6}(x-11)\right)+1{,}1$. ♦ détermine le niveau de l'eau à 18h.
Cr. 4	Structuration adéquate des étapes d'une démarche pertinente	♦ présente des traces claires et structurées.
Cr. 5	Justification congruente des étapes d'une démarche pertinente	♦ fournit une justification adéquate en fonction des traces.

3. LE MIROIR PARABOLIQUE

A. Exemple d'un raisonnement approprié.

- **COORDONNÉES DU FOYER DE LA PARABOLE**

L'équation de la parabole est $y^2 = 32(x+1)$
Les coordonnées du sommet de la parabole sont donc : (-1, 0)
La distance focale est de 8 mètres (32 = 4c ➔ c = 8).
Puisque le foyer est situé à 8 mètres à droite du sommet sur l'axe de la parabole, les coordonnées du foyer sont (7, 0).

- **COORDONNÉES DU POINT P OÙ LE RAYON LUMINEUX ATTEINT LE MIROIR**

Le rayon lumineux est issu du point S (15, 8) et il est parallèle à l'axe de la parabole.
L'ordonnée du point P où le rayon touche le miroir est égale à 8.
En remplaçant y par 8 dans l'équation de la parabole, on obtient :

$$8^2 = 32(x+1)$$
$$2 = x+1$$
$$x = 1$$

Les coordonnées du point P sont (1, 8).

- **DISTANCE TOTALE PARCOURUE PAR LE RAYON LUMINEUX**

$$m\overline{SP} + m\overline{PF} = (15-1) + \sqrt{(7-1)^2 + (0-8)^2}$$
$$m\overline{SP} + m\overline{PF} = 14 + 10 = 24$$

- **CONCLUSION**

La distance totale parcourue par le rayon lumineux entre la source S et le foyer F du miroir parabolique est de 24 mètres.
Remarque : Les élèves qui ont oublié la formule de la distance entre deux points peuvent utiliser la relation de Pythagore pour calculer la distance entre les points P et F.

B. Éléments observables dans le contexte de la tâche

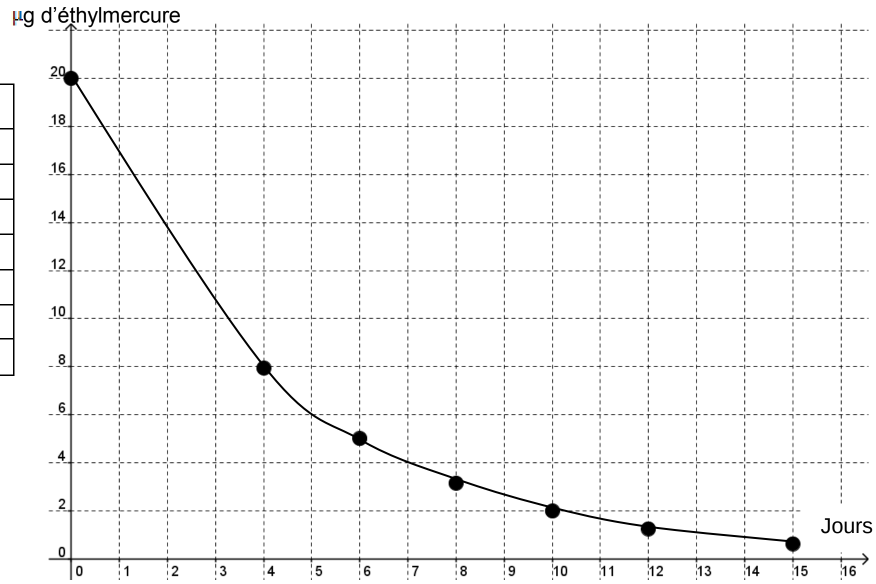
Critères d'évaluation de la compétence *Déployer un raisonnement mathématique*		**Éléments observables** **LE MIROIR PARABOLIQUE**
		L'élève…
Cr. 3	Mise en œuvre convenable d'un raisonnement mathématique adapté à la situation	♦ reconnaît qu'il faut utiliser l'équation de la parabole afin de trouver les coordonnées du point P où le rayon touche le miroir. ♦ utilise une stratégie pertinente pour déterminer la distance totale parcourue par le rayon lumineux. ♦ reconnaît qu'il faut utiliser l'équation de la parabole afin de trouver les coordonnées du foyer de la parabole.
Cr. 2	Utilisation correcte des concepts et des processus appropriés à la situation	♦ détermine les coordonnées du sommet (-1, 0) et la distance focale de la parabole (8 m). ♦ détermine les coordonnées du foyer de la parabole (7 , 0). ♦ détermine les coordonnées du point P où le rayon touche le miroir (1 , 8). ♦ détermine les mesures des segments SP (14 m)et PF (10 m). ♦ détermine la distance totale parcourue par le rayon lumineux (24 m).
Cr. 4	Structuration adéquate des étapes d'une démarche pertinente	♦ présente des traces claires et structurées.
Cr. 5	Justification congruente des étapes d'une démarche pertinente	♦ laisse des traces qui permettent de justifier sa réponse.

4. LE VACCIN DE LA GRIPPE AH1N1

A. Exemple d'un raisonnement approprié.

- **Construction du nuage de points**

Jours	μg d'éthylmercure
0	20
4	7,937
6	5
8	3,1498
10	1,9842
12	1,25
15	0,62499



Modèle mathématique :

- Selon l'allure de la courbe l'élève détermine qu'il s'agit d'une **fonction exponentielle** de la forme f(x) = a(c)^x.

Règle de la fonction :

- L'élève choisit 2 points de la table de valeurs ou 2 points de la courbe du nuage de points.

Exemple : avec (0 , 20) et (4 , 7,937)

Base = $\sqrt[4-0]{\frac{7{,}937}{20}}$ = $\sqrt[4]{0{,}39685}$ = 0,7937

Valeur initiale : 20 μg

Règle : $f(x) = 20(0{,}7937)^x$

(La vraie règle étant $f(x) = 20(0{,}5)^{\frac{x}{3}}$)

Détermination du moment exact où la concentration d'éthylmercure $<$ à 0,15 μg

- L'élève doit résoudre l'inéquation :

$$20(0{,}7937)^x < 0{,}15$$

Démarche :

$$20(0{,}7937)^x < 0{,}15$$
$$(0{,}7937)^x < 0{,}0075$$
$$\log_{0{,}7937} 0{,}0075 < x$$
$$x > 21{,}18$$

Réponse : le délai minimal est donc de 22 jours

B. Éléments observables dans le contexte de la tâche

Critères d'évaluation de la compétence *Déployer un raisonnement mathématique*		**Éléments observables** **LE VACCIN DE LA GRIPPE AH1N1**
		L'élève…
Cr. 3	Mise en œuvre convenable d'un raisonnement mathématique adapté à la situation	♦ reconnaît qu'il doit modéliser la situation à partir de la table de valeurs. ♦ cherche à déterminer les paramètres de la règle du modèle exponentiel. ♦ reconnaît qu'il doit résoudre une inéquation $f(x) < 0{,}15\mu g$.
Cr. 2	Utilisation correcte des concepts et des processus appropriés à la situation	♦ détermine la règle de la fonction à l'aide de la table de valeurs ou de la courbe du nuage de points. ♦ résous l'inéquation (x > 21,18). ♦ détermine que le délai minimal est de 22 jours.
Cr. 4	Structuration adéquate des étapes d'une démarche pertinente	♦ présente des traces claires et structurées.
Cr. 5	Justification congruente des étapes d'une démarche pertinente	♦ laisse des traces qui permettent de justifier sa réponse.

5. ISTIOPHORUS PLATYPTERUS

A. Exemple d’un raisonnement approprié.

- Équation de la fonction valeur absolue représentant le pourcentage de la vitesse maximale selon la température de l’eau. Et ce à partir du sommet (21,100) et du point (1,50).

  Les coordonnées du sommet nous permettent de déduire les valeurs de h et de k :
  h = 21 k = 100

  Grâce au point (1,50), il est possible de déterminer la valeur de a :
  50 = a |1 – 21| + 100
  -5/2 = a ou a = -2,5

  Donc l’équation est : V(T) = -2,5|x – 21| + 100

- Calcul du pourcentage de la vitesse maximale sachant que la température de l’eau était de 25°C :

  V(25) = -2,5 |25 – 21| + 100 = 90

  Donc le poisson se déplaçait à 90 % de sa vitesse maximale.

- Calcul de la vitesse maximale :

$$\frac{99\text{ km/h}}{90\ \%} = \frac{V_{max}}{100\ \%}$$

  Donc la vitesse maximale du poisson est de 110 km/h

- Calcul de la masse en sachant que la vitesse maximale du spécimen est de 110km/h :

$$110 = 9\sqrt{(M-1)} + 20$$

  M = 101

- Conclusion

  La masse du poisson observé par Érick et Luc était de 101 kg.

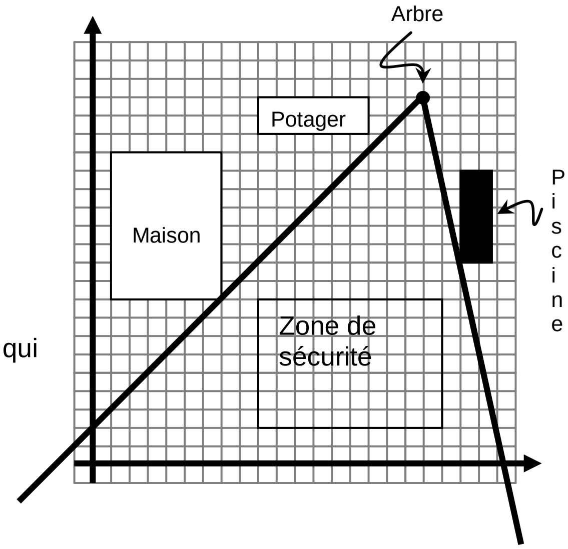
B. Éléments observables dans le contexte de la tâche

Critères d'évaluation de la compétence *Déployer un raisonnement mathématique*		Éléments observables **Istiophorus platypterus**
		L'élève…
Cr. 3	Mise en oeuvre convenable d'un raisonnement mathématique adapté à la situation	♦ reconnaît qu'il doit trouver l'équation de la fonction valeur absolue. ♦ reconnaît qu'il doit déduire le % de la vitesse maximale. ♦ cherche à déterminer la vitesse maximale du poisson ♦ cherche à déterminer la masse du poisson à l'aide de l'équation.
Cr. 2	Utilisation correcte des concepts et des processus appropriés à la situation	♦ détermine la valeur du a dans la fonction valeur absolue ($a = -2,5$). ♦ détermine l'équation de la fonction valeur absolue ($V(T) = -2,5\|x - 21\| + 100$). ♦ détermine le % de la vitesse maximale (90%). ♦ détermine la vitesse maximale (110 km/h). ♦ détermine la masse du poisson observé (101 kg).
Cr. 4	Structuration adéquate des étapes d'une démarche pertinente	♦ présente des traces claires et structurées. ♦ respecte les règles et conventions propres au langage mathématique.
Cr. 5	Justification congruente des étapes d'une démarche pertinente	♦ laisse des traces qui permettent de justifier son résultat.

6. LA COUPE D'UN ARBRE

A. Exemple d'un raisonnement approprié.

Zone de sécurité



- Vecteur Arbre-Maison
  $\left(70-180, 90-200\right) = \left(-110, -110\right)$

- Vecteur Arbre-Piscine
  $\left(200-180, 110-200\right) = \left(20, -90\right)$

- Orientation, en degrés, possible du vecteur qui représente la chute de l'arbre.

$$\theta_{arbre-Maison} = 180^\circ + \tan^{-1}\left(\frac{110}{110}\right) = 225^\circ$$

$$\theta_{arbre-piscine} = 360^\circ - \tan^{-1}\left(\frac{90}{20}\right) \approx 282{,}5^\circ$$

Donc l'arbre doit tomber dans l'intervalle $\theta \in \left]225, 282\right[$

- **Résultante des 3 forces**

Stéphane : $\vec{s} = \left(-110, -40\right)$ Nicolas : $\vec{n} = \left(50, -40\right)$.

Nouvelles coordonnées du vent $\vec{v} = \left(-50, -20\right)$

Composantes de la somme des 3 forces
$\vec{s} + \vec{n} + \vec{v} = \left(-110+50-50, -40-40-20\right) = \left(-110, -100\right)$

- **Orientation de la chute de l'arbre**

Orientation de cette force : $\theta = 180^\circ + \tan^{-1}\left(\frac{100}{110}\right) \approx 222{,}3^\circ$

- **Résultat :** □ Il a raison …
  √ Il n'a pas raison …

Explication :
Il n'a pas raison, l'orientation de la résultante n'appartient pas à la zone de sécurité.

B. Éléments observables dans le contexte de la tâche

Critères d'évaluation de la compétence *Déployer un raisonnement mathématique*		**Éléments observables** **TITRE**
		L'élève…
Cr. 3	Mise en œuvre convenable d'un raisonnement mathématique adapté à la situation	♦ reconnaît que le résultat recherché fait appel à une somme de forces. ♦ reconnaît qu'il doit déterminer les endroits critiques; ♦ reconnaît que le potager n'est pas en cause dans cette situation. ♦ reconnaît qu'il doit déterminer des angles ou des orientations. ♦ compare l'orientation de la résultante à l'intervalle de la zone de sécurité.
Cr. 2	Utilisation correcte des concepts et des processus appropriés à la situation	♦ détermine un vecteur ou un segment qui relie l'arbre à la maison ((-110 , -110)). ♦ détermine un vecteur ou un segment qui relie l'arbre à la piscine ((20 , -90)). ♦ détermine l'orientation du vecteur ou du segment arbre-maison (225°) et arbre-piscine (282,5°). ♦ détermine l'intervalle des orientations possibles ( ] 225 , 282,5 [ ). ♦ détermine la résultante des trois forces ((-110 , -100)). ♦ détermine l'orientation de la résultante (222,3°). ♦ constate que l'orientation de la résultante n'appartient pas à la zone de sécurité.
Cr. 4	Structuration adéquate des étapes d'une démarche pertinente	♦ présente des traces claires et structurées.
Cr. 5	Justification congruente des étapes d'une démarche pertinente	♦ laisse des traces qui permettent de justifier sa démarche. ♦ justifie son résultat (Il n'a pas raison, l'orientation de la résultante n'appartient pas à la zone de sécurité.).

7. RÉHABILITATION

A. Exemple d’un raisonnement approprié.

- **Modélisation de la situation :**

x : temps d’entrainement cardiovasculaire (min)
y : temps d’entrainement musculaire (min)

$x \geq 0$

$y \geq 0$

$2y \geq x$

$x \geq 30$

$x + y \geq 60$

$x + y \leq 120$

Fonction à minimiser : Z = 100x + 80y

- **Optimisation de la situation :**

Coordonnées des sommets	Z = 100x + 80y
(40 , 20)	5 600
(80 , 40)	11 200
(30 , 120)	12 600
(30 , 30)	5 400

- **Conclusion :**

La répartition de son temps devra être de 30 minutes d’entraînement cardiovasculaire et de 30 minutes d’entraînement musculaire. Son nombre de battements sera ainsi de 5 400 au cours de chaque séance d’entrainement.

B. Éléments observables dans le contexte de la tâche

Critères d'évaluation de la compétence *Déployer un raisonnement mathématique*		**Éléments observables** **LA RÉHABILITATION**
		L'élève…
Cr. 3	Mise en œuvre convenable d'un raisonnement mathématique adapté à la situation	♦ reconnaît qu'il doit déterminer : • un système d'inéquations; • graphiquement le polygone de contraintes; • les sommets du polygone de contraintes; • une fonction à optimiser; • la valeur de la fonction à optimiser à chacun des sommets; • la valeur minimale de la fonction à optimiser.
Cr. 2	Utilisation correcte des concepts et des processus appropriés à la situation	♦ détermine les contraintes : $x \geq 0$, $y \geq 0$, $2y \geq x$, $x \geq 30$, $x + y \geq 60$ et $x + y \leq 120$ ♦ détermine la fonction à optimiser Z = 100x + 80y . ♦ détermine le polygone de contraintes. ♦ détermine les sommets du polygone de contraintes ((40, 20) , (80, 40) , (30, 120) et (30, 30)). ♦ détermine la valeur de la fonction à optimiser aux sommets (5 600, 11 200, 12 600, 5 400). ♦ détermine le couple-solution ((30 , 30)).
Cr. 4	Structuration adéquate des étapes d'une démarche pertinente	♦ identifie correctement ses variables. ♦ présente des traces claires et structurées.
Cr. 5	Justification congruente des étapes d'une démarche pertinente	♦ laisse des traces qui permettent de justifier son résultat.

8. LA VALEUR DE L'EXPRESSION TRIGONOMÉTRIQUE

A. Exemple d'un raisonnement approprié.

Valeur de x (en degrés)	$A(x) = 2\cos^2 x - 1$	$B(x) = 1 - 2\sin^2 x$	$C(x) = \cos 2x$
0	1	1	1
30	0,5	0,5	0,5
45	0	0	0
90	-1	-1	-1
135	0	0	0
180	1	1	1

- **Conjecture :**

  Les trois expressions trigonométriques sont équivalentes. Peu importe la valeur de l'angle, les 3 expressions ont la même valeur.

B. Éléments observables dans le contexte de la tâche

Critères d'évaluation de la compétence *Déployer un raisonnement mathématique*		Éléments observables LA VALEUR DE L'EXPRESSION TRIGONOMÉTRIQUE
		L'élève…
Cr. 3	Mise en œuvre convenable d'un raisonnement mathématique adapté à la situation	♦ utilise une stratégie appropriée pour faire émerger une conjecture. ♦ reconnaît qu'il doit attribuer plusieurs valeurs à la variable afin de calculer la valeur des expressions.
Cr. 2	Utilisation correcte des concepts et des processus appropriés à la situation	♦ pour une valeur d'angle donnée, détermine la valeur de chacune des 3 expressions. ♦ trouve la valeur des expressions pour différentes valeurs d'angles.
Cr. 4	Structuration adéquate des étapes d'une démarche pertinente	♦ laisse des traces claires et structurées.
Cr. 5	Justification congruente des étapes d'une démarche pertinente	♦ laisse des traces qui permettent de justifier sa réponse.
Cr. 1	Formulation d'une conjecture appropriée à la situation	♦ formule une conjecture en s'appuyant sur ses observations. ♦ formule une conjecture relative au lien entre les trois expressions.