Pré-Test Les Identités Trigonométriques et La Fonction Tangente

CORRIGÉ

1.

a)

$\cos x \cdot \sqrt{\sec^2 x - 1} = \sin x$	
$\cos x \cdot \tan x = \sin x$	car $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$
$\cos x \cdot \dfrac{\sin x}{\cos x} = \sin x$	par définition du rapport tangente
$\sin x = \sin x$	on simplifie

b)

$(\sec x \cdot \text{cotan } x)^2 - (\cos x \cdot \text{cosec } x)^2 = 1$	
$\left(\dfrac{1}{\sin x}\right)^2 - \left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)^2 = 1$	par définition des rapports sécante, cotangente et cosécante
$\text{cosec}^2 x - \text{cotan}^2 x = 1$	par définition
$1 = 1$	car $\text{cosec}^2 x = 1 + \text{cotan}^2 x$

c)

$\text{cosec}^2 x \cdot \tan^2 x = 1 + \tan^2 x$	par définition du rapport tangente
$\dfrac{1}{\sin^2 x} \cdot \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	
$\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	on simplifie
$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$	par définition du rapport sécante
$1 + \tan^2 x = 1 + \tan^2 x$	car $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$

d)

$\dfrac{1}{\cos^2 x} - \dfrac{1}{\text{cotan}^2 x} = 1$	
$\sec^2 x - \tan^2 x = 1$	par définition des rapports sécante et cotangente
$1 + \tan^2 x - \tan^2 x = 1$	car $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$
$1 = 1$	

e)

$\sin^2 x \cdot \text{cotan}^2 x + \sin^2 x = 1$	
$\sin^2 x \cdot \dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + \sin^2 x = 1$	par définition du rapport cotangente
$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$	on simplifie
$1 = 1$	car $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

f)

$\dfrac{1 - 2\cos^2 x}{\sin x \cdot \cos x} = \tan x - \text{cotan } x$	
$\dfrac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x \cdot \cos x} = \tan x - \text{cotan } x$	car $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
$\dfrac{\sin x}{\cos x} - \dfrac{\cos x}{\sin x} = \tan x - \text{cotan } x$	on simplifie
$\tan x - \text{cotan } x = \tan x - \text{cotan } x$	par définition des rapports tangente et cotangente

g)

$\dfrac{\text{cotan } x - \tan x}{\text{cotan } x + \tan x} = 1 - 2\sin^2 x$	
$\dfrac{\text{cotan } x - \tan x}{\dfrac{\cos x}{\sin x} + \dfrac{\sin x}{\cos x}} = 1 - 2\sin^2 x$	par définition des rapports tangente et cotangente
$\dfrac{\text{cotan } x - \tan x}{\dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x \cdot \cos x}} = 1 - 2\sin^2 x$	on met sur le même dénominateur
$(\text{cotan } x - \tan x) \sin x \cos x = 1 - 2\sin^2 x$	on simplifie
$\left(\dfrac{\cos x}{\sin x} - \dfrac{\sin x}{\cos x}\right) \sin x \cos x = 1 - 2\sin^2 x$	par définition
$\cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$	on simplifie
$1 - 2\sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$	car $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

h) $(\text{cosec } x)(\text{cosec } x - \sin x) = \text{cotan}^2 x$

$\text{cosec}^2 x - \sin x \cdot \text{cosec } x = \text{cotan}^2 x$ on distribue cosec x

$\text{cosec}^2 x - \dfrac{\sin x}{\sin x} = \text{cotan}^2 x$ par définition du rapport cosécante

$\text{cosec}^2 x - 1 = \text{cotan}^2 x$

$\text{cotan}^2 x = \text{cotan}^2 x$ car $\text{cotan}^2 x + 1 = \text{cosec}^2 x$

i) $\sec x - \tan x \cdot \sin x = \cos x$

$\dfrac{1 - \sin^2 x}{\cos x} = \cos x$ par définition des rapports sécante et tangente

$\dfrac{\cos^2 x}{\cos x} = \cos x$ car $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$\cos x = \cos x$ on simplifie

j) $\tan^2 x \cdot \sin x + \sin x = \tan x \cdot \sec x$

$\sin x(\tan^2 x + 1) = \tan x \cdot \sec x$ on met $(\sin x)$ en évidence

$\sin x \cdot \sec^2 x = \tan x \cdot \sec x$ car $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$

$\sin x \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x} = \tan x \cdot \sec x$ par définition du rapport sécante

$\tan x \cdot \sec x = \tan x \cdot \sec x$ par définition

k) $\dfrac{\sin^2 x}{1 - \cos x} - 1 = \cos x$

$\dfrac{1 - \cos^2 x}{1 - \cos x} - 1 = \cos x$ car $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$\dfrac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{1 - \cos x} - 1 = \cos x$ on développe la différence de carrés

$1 + \cos x - 1 = \cos x$ on simplifie

$\cos x = \cos x$

l) $\dfrac{1 + \sec x}{\sec x - 1} + \dfrac{1 + \cos x}{\cos x - 1} = 0$

$\dfrac{(1 + \sec x)(\cos x - 1) + (1 + \cos x)(\sec x - 1)}{(\sec x - 1)(\cos x - 1)} = 0$ on met sur le même dénominateur

$\dfrac{\cos x - \sec x + \cos x \cdot \sec x - 1 - \cos x + \sec x + \cos x \cdot \sec x - 1}{(\sec x - 1)(\cos x - 1)} = 0$ on développe le numérateur

$\dfrac{2 \cos x \cdot \sec x - 2}{(\sec x - 1)(\cos x - 1)} = 0$ on simplifie

$\dfrac{2 \dfrac{\cos x}{\cos x} - 2}{(\sec x - 1)(\cos x - 1)} = 0$ par définition du rapport sécante

$\dfrac{2 - 2}{(\sec x - 1)(\cos x - 1)} = 0$ on simplifie

$0 = 0$

m) $\dfrac{\sin(u + v)}{\cos(u) \cdot \cos(v)} = \tan(u) + \tan(v)$

$\dfrac{\sin(u) \cdot \cos(v) + \sin(v) \cdot \cos(u)}{\cos(u) \cdot \cos(v)} = \tan(u) + \tan(v)$ par la règle d'addition du sinus

$\dfrac{\sin(u) \cdot \cos(v)}{\cos(u) \cdot \cos(v)} + \dfrac{\sin(v) \cdot \cos(u)}{\cos(u) \cdot \cos(v)} = \tan(u) + \tan(v)$ on sépare la fraction en deux termes

$\dfrac{\sin(u)}{\cos(u)} + \dfrac{\sin(v)}{\cos(v)} = \tan(u) + \tan(v)$ on simplifie

$\tan(u) + \tan(v) = \tan(u) + \tan(v)$ par définition du rapport tangente

n)

$$\cos(u+v)\cdot\cos(u-v)=\cos^2(u)-\sin^2(v)$$

$$\left(\cos(u)\cos(v)-\sin(u)\sin(v)\right)\cdot\cos(u-v)=\cos^2(u)-\sin^2(v)$$ par la règle d'addition du cosinus

$$\left(\cos(u)\cos(v)-\sin(u)\sin(v)\right)\cdot\left(\cos(u)\cos(v)+\sin(u)\sin(v)\right)=\cos^2(u)-\sin^2(v)$$ par la règle de soustraction du cosinus

$$\cos^2(u)\cos^2(v)^2-\sin^2(u)\sin^2(v)=\cos^2(u)-\sin^2(v)$$ on multiplie les parenthèses

$$\cos^2(u)\left(1-\sin^2(v)\right)-\sin^2(v)\left(1-\cos^2(u)\right)=\cos^2(u)-\sin^2(v)$$ car $\sin^2 x+\cos^2 x=1$

$$\cos^2(u)-\cos^2(u)\sin^2(v)-\sin^2(v)+\cos^2(u)\sin^2(v)=\cos^2(u)-\sin^2(v)$$

$$\cos^2(u)-\sin^2(v)=\cos^2(u)-\sin^2(v)$$ on simplifie

o)

$$\frac{\text{cotan}^2 x-1}{\text{cotan}^2 x+1}=\cos 2x$$

$$\frac{\text{cotan}^2 x-1}{\text{cosec}^2 x}=\cos 2x$$ car $\text{cotan}^2 x+1=\text{cosec}^2 x$

$$\frac{\text{cotan}^2 x}{\text{cosec}^2 x}-\frac{1}{\text{cosec}^2 x}=\cos 2x$$

$$\frac{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}{\sin^2 x}-\sin^2 x=\cos 2x$$ par définition des rapports cosécante et cotangente

$$\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$$ on simplifie

$$\cos x\cdot\cos x-\sin x\cdot\sin x=\cos 2x$$ par la règle d'addition du cosinus

$$\cos(x+x)=\cos(2x)$$

p)

$$\sin 2x\cdot\sec x=2\sin x$$ par la règle d'addition du sinus

$$(\sin x\cos x+\sin x\cos x)\sec x=2\sin x$$

$$(\sin x\cos x+\sin x\cos x)\frac{1}{\cos x}=2\sin x$$ par définition du rapport sécante

$$\sin x+\sin x=2\sin x$$ on simplifie

2. Soit la fonction f définie comme suit : $f(x) = 3\tan(2(x + \pi)) + 1$.

a) Trouvez la période de cette fonction.

$P = \frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{2}$

b) Donnez un point milieu d'un cycle.

$(-\pi, 1)$

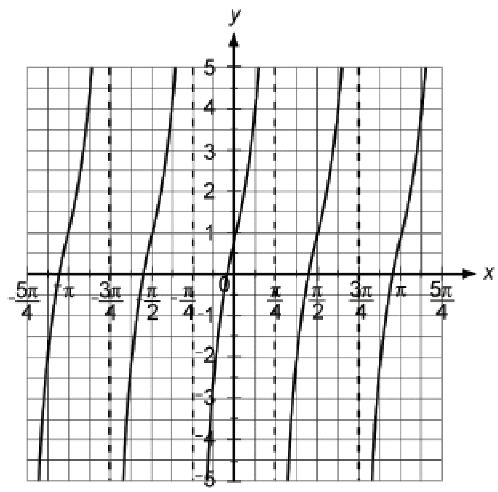
c) Trouvez les équations des asymptotes.

$x = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}$, où $n \in \mathbb{Z}$, ou $x = -\frac{3\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}$, où $n \in \mathbb{Z}$.

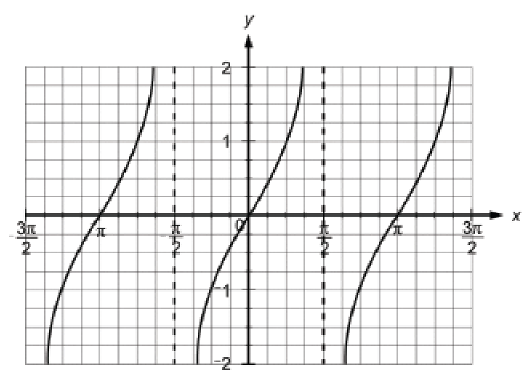
d) Déterminez la croissance entre deux asymptotes consécutives.

La fonction est croissante entre deux asymptotes consécutives, car a et b sont de même signe et ab > 0.

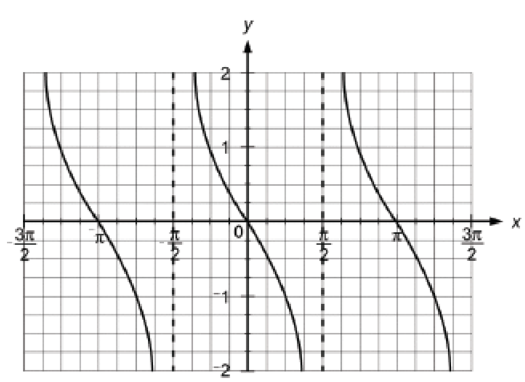
e) Tracez une esquisse de cette fonction dans le plan ci-contre.



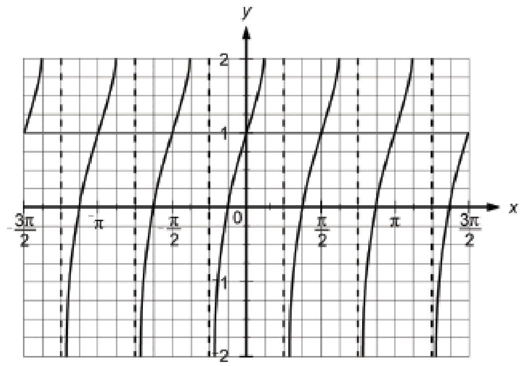
3. **a)** $f(x) = \tan(x - \pi)$



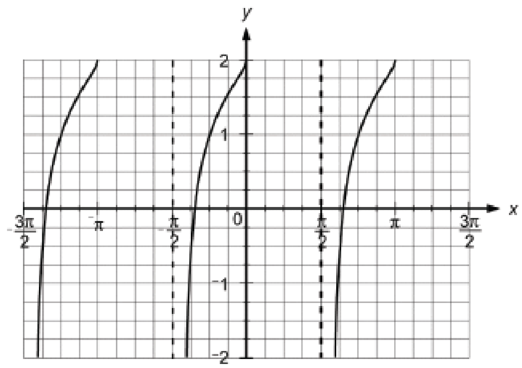
b) $f(x) = -\tan x$



c) $f(x) = \tan 2(x - \pi) + 1$

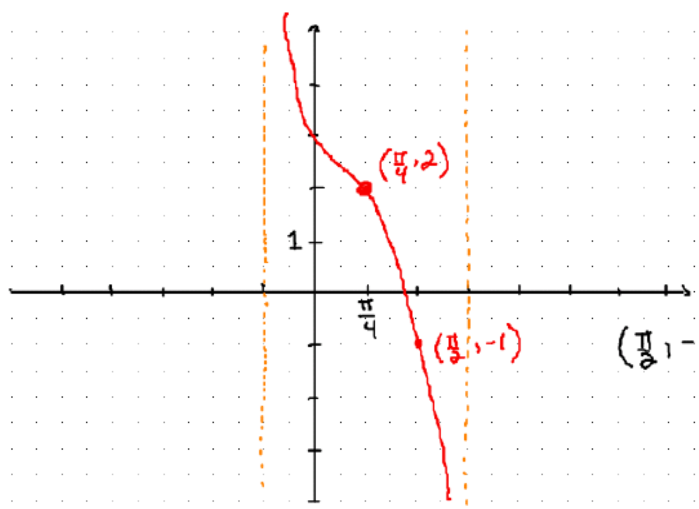


d) $f(x) = {}^{-}\tan({}^{-}x + \pi) + 2$



4. 4. **Trouve la règle (si c'est possible) de chacune des fonctions tangentes ci-dessous :**

Cas 1 : Le graphique de la fonction a deux asymptotes consécutives d'équations $x = -\frac{\pi}{4}$ et $x = \frac{3\pi}{4}$. La fonction est décroissante et son graphique passe par les points de coordonnées $\left(\frac{\pi}{4}, 2\right)$ et $\left(\frac{\pi}{2}, -1\right)$.



$(h, k) = \left(\frac{\pi}{4}, 2\right)$

$|b| = \frac{\pi}{P} \Rightarrow \frac{\pi}{\pi} = 1$

$f(x) = a \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2$

$\left(\frac{\pi}{2}, -1\right) \Rightarrow -1 = a \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + 2$

$-3 = a \tan\left(\frac{2\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)$

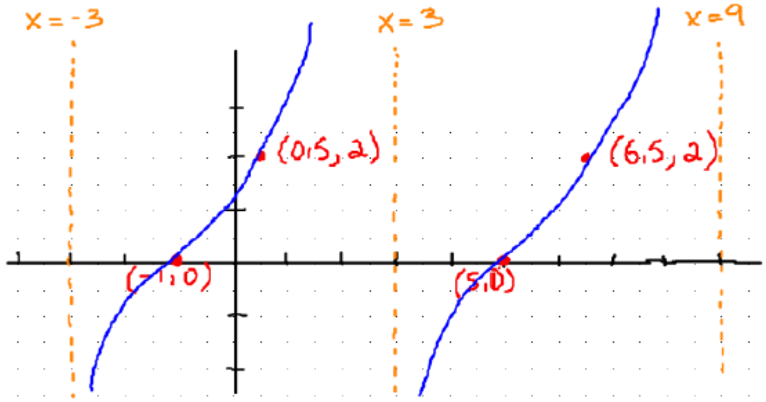
$-3 = a \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$-3 = a \cdot 1$

$a = -3$

Rép: $f(x) = -3 \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2$

Cas 2 : Les valeurs de deux zéros consécutifs sont −1 et 5, une asymptote du graphique a pour équation $x = 3$ et le graphique de la fonction passe par le point de coordonnées (6,5, 2).



$P = 6$ (dist entre asymptotes)

$b = \frac{\pi}{6}$

$\underbrace{h = 0}_{*}$ ou $h = 6$

On a $f(x) = a \tan \frac{\pi}{6} x + b$

avec $(-1, 0)$	avec $(0,5, 2)$
$0 = a \tan \frac{\pi}{6}(-1) + k$	$2 = a \tan \frac{\pi}{6}(0,5) + k$
$-k = a \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)$	$2 = a \tan\left(\frac{\pi}{12}\right) + k$
$-k = {}^{-}0,5774\, a$	$2 = 0,2679\, a + k$
$k = 0,5774\, a$	$2 - 0,2679\, a = k$

$\Rightarrow a = 2,366$

$k = 1,366$

$f(x) = 2,366 \tan \frac{\pi}{6} x + 1,366$

Cas 3 : Les zéros sont décrits comme suit : $x=\frac{\pi}{4}+n\frac{3\pi}{2}$, où $n\in\mathbb{Z}$. De plus, la fonction est décroissante et les asymptotes sont décrites comme suit : $x=\frac{\pi}{2}+n\frac{3\pi}{2}$, où $n\in\mathbb{Z}$.

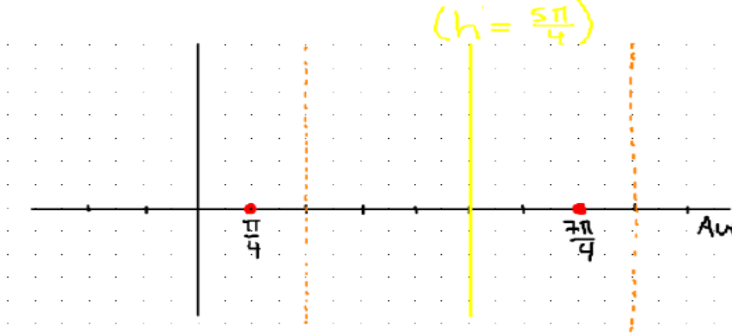
On a $h=\frac{5\pi}{4}$

1 période plus loin

et 2 points $\left(\frac{\pi}{4},0\right)$ et $\left(\frac{7\pi}{4},0\right)$

$b=\frac{\pi}{\frac{3\pi}{2}}=\frac{2}{3}$

On a : $f(x)=a\tan\frac{2}{3}\left(x-\frac{5\pi}{4}\right)+k$



Avec $\left(\frac{7\pi}{4},0\right)$ $0=a\tan\frac{2}{3}\left(\frac{7\pi}{4}-\frac{5\pi}{4}\right)+k$

$0=a\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)+k$

$0=a\sqrt{3}+k$

$k=-a\sqrt{3}$

Avec $\left(\frac{\pi}{4},0\right)$: $0=a\tan\frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{5\pi}{4}\right)+k$

$0=a\tan\left(\frac{-2\pi}{3}\right)+k$

$0=a\sqrt{3}+k$

$k=-a\sqrt{3}$

On ne peut pas trouver la règle de cette fonction car les points connus sont des zéros

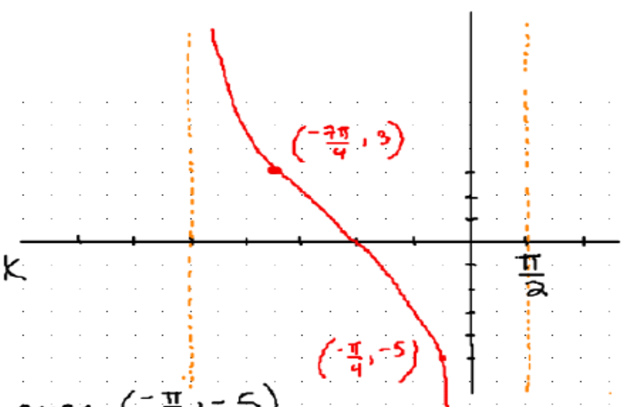
Cas 4 : Le graphique de la fonction a deux asymptotes consécutives d'équations $x=-\frac{5\pi}{2}$ et $x=\frac{\pi}{2}$, et il passe par les points de coordonnées $\left(-\frac{7\pi}{4},3\right)$ et $\left(-\frac{\pi}{4},-5\right)$.

$h=-\pi$

$p=3\pi$

$b=\frac{\pi}{3\pi}=\frac{1}{3}$

On a $f(x)=a\tan\frac{1}{3}(x+\pi)+k$



avec $\left(-\frac{7\pi}{4},3\right)$	avec $\left(-\frac{\pi}{4},-5\right)$
$3=a\tan\frac{1}{3}\left(-\frac{7\pi}{4}+\pi\right)+k$	$-5=a\tan\frac{1}{3}\left(-\frac{\pi}{4}+\pi\right)+k$
$3=a\tan\frac{1}{3}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+k$	$-5=a\tan\frac{1}{3}\left(\frac{3\pi}{4}\right)+k$
$3=a\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)+k$	$-5=a\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)+k$
$3=a(-1)+k$	$-5=a+k$
$k=a+3$	$k=-a-5$

$a+3=-a-5$

$2a=8$

$a=-4$ et $k=-1$

Rép : $f(x)=-4\tan\frac{1}{3}(x+\pi)-1$